УДК 539.3 МЕХАНИКА

В.А. Меньшиков, А.В. Меньшиков

Гранично-контактные интегральные уравнения динамической задачи теории упругости о трещине на поверхности раздела полупространств

(Представлено академиком НАН Украины А.Н. Гузем)

The paper concerns the boundary contact integral equations for the interface crack between two elastic half-spaces with different mechanical properties under dynamic loading. The derived system of equations allows to evaluate the displacements at the crack faces, the traction and the displacements at the joint surface.

Вступление. Решению задач о трещине на границе двух материалов посвящено значительное число работ отечественных и зарубежных авторов, смотри, например [1-3]. Однако, как правило, исследователями рассматриваются трещины канонических форм (туннельные, круговые, кольцевые в плане и так далее) под возлействием статического нагружения. В то же время, предложенный в работе А.Н. Гузя и В.В. Зозули [4] и получивший дальнейшее развитие в работах [5-7] подход позволяет рассматривать трещины достаточно произвольной формы в плане при динамическом нагружении упругого однородного трехмерного пространства. Этот подход, основывающийся на использовании прямого метода граничных интегральных уравнений, является на наш взгляд перспективным при решении задач с трещинами на поверхности сцепления сред с разными упругими характеристиками.

Цель настоящей работы - вывод граничных интегральных уравнений, позволяющих определять поля перемещений и напряжений для составного тела с трещиной в границе раздела материалов при динамическом внешнем воздействии.

Постановка задачи. Рассмотрим бесконечное упругое тело в трехмерном пространстве, состоящее из двух однородных изотропных тел, занимающих подобласти-полупространства Ω_1 и Ω_2 с упругими характеристиками λ_1, μ_1 и λ_2, μ_2, и плотностями ρ_1 и ρ_2. Γ_1 и Γ_2 - регулярные границы полупространств Ω_1 и Ω_2, характеризующиеся внешними нормалями $\mathbf{n}_{\Gamma_1}$ и $\mathbf{n}_{\Gamma_2}$.

Пусть $\mathbf{u}^m(\mathbf{x},t) = (u_1^m(\mathbf{x},t), u_2^m(\mathbf{x},t), u_3^m(\mathbf{x},t))^\top$ - вектор перемещений, а $\mathbf{p}^m(\mathbf{x},t) = (p_1^m(\mathbf{x},t), p_2^m(\mathbf{x},t), p_3^m(\mathbf{x},t))^\top$ - вектор поверхностных сил в Ω_m, здесь и далее $m = 1, 2$.

Положим, что Γ_1 и Γ_2 состоят из бесконечных участков общей границы Γ_1^* и Γ_2^* и конечных участков Γ_1^p и Γ_2^p, объединение которых $\Gamma^p = \Gamma_1^p \bigcup \Gamma_2^p$ представляет собой собой трещину-расслоение.

Пусть напряженно-деформированное состояние каждого из тел описывается уравнениями линейной динамической теории упругости в перемещениях в отсутствие объемных сил

$$(\lambda_m + \mu_m)\mathrm{grad}\ \mathrm{div}\mathbf{u}^m(\mathbf{x},t) + \mu_m \Delta \mathbf{u}(\mathbf{x},t) = \rho_m \partial_t^2 \mathbf{u}(\mathbf{x},t), \quad \mathbf{x} \in \Omega_m, \ \ t \in \mathrm{T} = [0,\infty), \qquad (1)$$

где Δ - трехмерный оператор Лапласа.

Предположим, что в начальный момент времени тела находятся в недеформированном состоянии, перемещения и скорости их точек равны нулю. Таким образом, начальные условия имеют следующий вид:

$$\mathbf{u}^m(\mathbf{x},0) = \mathrm{grad}\mathbf{u}^m(\mathbf{x},0) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega_m.$$

Граничные условия на общем участке границы $\Gamma^* = \Gamma_1 \bigcap \Gamma_2$ имеют вид условий плотного механического контакта:

$$\mathbf{u}^1(\mathbf{x},t) = \mathbf{u}^2(\mathbf{x},t), \;\; \mathbf{p}^1(\mathbf{x},t) = -\mathbf{p}^2(\mathbf{x},t), \quad \mathbf{x} \in \Gamma^*, \; t \in \mathrm{T},$$

а на поверхности трещины Γ^p заданы поверхностные силы

$$\mathbf{p}^1(\mathbf{x},t) = \mathbf{g}^1(\mathbf{x},t), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1^p, \; t \in \mathrm{T},$$

$$\mathbf{p}^2(\mathbf{x},t) = \mathbf{g}^2(\mathbf{x},t), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_2^p, \; t \in \mathrm{T}.$$

На бесконечности должны выполняться условия, обеспечивающие конечность энергии неограниченного упругого тела $\|\mathbf{u}(\mathbf{x},t)\| \leq c/r$, где c - константа, $r \to \infty$ - расстояние от начала координат.

Интегральные уравнения задачи. В каждой из подобластей Ω_m перемещения представим через граничные перемещения и поверхностные силы посредством соотношений Сомильяны [8].

$$u_j^m(\mathbf{y},t) = \int\limits_{\mathrm{T}}\int\limits_{\Gamma_m} \left[p_i^m(\mathbf{x},\tau)U_{ij}^m(\mathbf{x},\mathbf{y},t-\tau) - u_i^m(\mathbf{x},\tau)W_{ij}^m(\mathbf{x},\mathbf{y},t-\tau)\right] d\mathbf{x}d\tau, \tag{2}$$

$$\mathbf{y} \in \Omega_m, \; t \in \mathrm{T}, \; j = 1,2,3,$$

здесь $\mathbf{x}$ - точка наблюдения, $\mathbf{y}$ - точка нагружения.

Функция $W_{ij}^m(\mathbf{x},\mathbf{y},t-\tau)$ может быть получена из фундаментального решения уравнения (1) $U_{ij}^m(\mathbf{x},\mathbf{y},t-\tau)$ при помощи оператора

$$P_{ik}\left[\bullet,\mathbf{y}\right] = \lambda n_i(\mathbf{y})\frac{\partial[\bullet]}{\partial y_k} + \mu\left[\delta_{ik}\frac{\partial[\bullet]}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{y})} + n_k(\mathbf{y})\frac{\partial[\bullet]}{\partial y_i}\right] \tag{3}$$

и имеет вид

$$W_{ij}^m(\mathbf{x},\mathbf{y},t-\tau) = \lambda_m n_i^m(\mathbf{x})\frac{\partial}{\partial x_k}U_{kj}^m(\mathbf{x},\mathbf{y},t-\tau) +$$

$$+\mu_m n_k^m(\mathbf{x})\left[\frac{\partial}{\partial x_k}U_{ij}^m(\mathbf{x},\mathbf{y},t-\tau) + \frac{\partial}{\partial x_i}U_{kj}^m(\mathbf{x},\mathbf{y},t-\tau)\right].$$

Применив к соотношению (2) дифференциальный оператор теории упругости (3), получим соотношения для компонент вектора нагрузки $p_j^m(\mathbf{y},t)$ в каждой из подобластей Ω_m выражающиеся через перемещения и усилия на границе

$$p_j^m(\mathbf{y},t) = \int\limits_{\mathrm{T}}\int\limits_{\Gamma_m} \left[p_i^m(\mathbf{x},\tau)K_{ij}^m(\mathbf{x},\mathbf{y},t-\tau) - u_i^m(\mathbf{x},\tau)F_{ij}^m(\mathbf{x},\mathbf{y},t-\tau)\right] d\mathbf{x}d\tau, \tag{4}$$

где

$$K_{ij}^m(\mathbf{x},\mathbf{y},t-\tau) = \lambda_m n_i^m(\mathbf{y})\frac{\partial}{\partial y_k}U_{kj}^m(\mathbf{x},\mathbf{y},t-\tau) +$$

$$+\mu_m n_k^m(\mathbf{y})\left[\frac{\partial}{\partial y_k}U_{ij}^m(\mathbf{x},\mathbf{y},t-\tau) + \frac{\partial}{\partial y_i}U_{kj}^m(\mathbf{x},\mathbf{y},t-\tau)\right],$$

$$F_{ij}^m(\mathbf{x},\mathbf{y},t-\tau) = \lambda_m n_i^m(\mathbf{y})\frac{\partial}{\partial y_k}W_{jk}^m(\mathbf{x},\mathbf{y},t-\tau) +$$

$$+\mu_m n_k^m(\mathbf{y})\left[\frac{\partial}{\partial y_k}W_{ji}^m(\mathbf{x},\mathbf{y},t-\tau) + \frac{\partial}{\partial y_i}W_{jk}^m(\mathbf{x},\mathbf{y},t-\tau)\right].$$

Учитывая, что Γ_1, Γ_2 - регулярные поверхности, полагая, что существует достаточная гладкость распределений плотностей граничных перемещений и поверхностных сил, в соотношениях (2) и (4) устремим точку пространства $\mathbf{y}$ на Γ_m, после предельного перехода получим граничные равенства

$$\frac{1}{2}u_j^m(\mathbf{y},t) = \int\limits_{\mathrm{T}}\int\limits_{\Gamma_m}\Big[p_i^m(\mathbf{x},\tau)U_{ij}^m(\mathbf{x},\mathbf{y},t-\tau) - u_i^m(\mathbf{x},\tau)W_{ij}^m(\mathbf{x},\mathbf{y},t-\tau)\Big]\,d\mathbf{x}d\tau, \tag{5}$$

$$\frac{1}{2}p_j^m(\mathbf{y},t) = \int\limits_{\mathrm{T}}\int\limits_{\Gamma_m}\Big[p_i^m(\mathbf{x},\tau)K_{ij}^m(\mathbf{x},\mathbf{y},t-\tau) - u_i^m(\mathbf{x},\tau)F_{ij}^m(\mathbf{x},\mathbf{y},t-\tau)\Big]\,d\mathbf{x}d\tau, \tag{6}$$

здесь $\mathbf{y} \in \Gamma_m$.

В эти равенства входят известные величины, которыми являются поверхностные силы на участках границ Γ_1^p, Γ_2^p, и неизвестные: перемещения на участках Γ_1^p, Γ_2^p, а также перемещения и поверхностные силы на Γ_1^*, Γ_2^*. Для нахождения указанных неизвестных построим систему гранично-контактных интегральных уравнений на основе уравнений (5) и (6).

Граничные интегральные уравнения на поверхности Γ_1 области Ω_1 будут иметь вид:

$$\frac{1}{2}p_j^1(\mathbf{y},t) = \int\limits_{\mathrm{T}}\int\limits_{\Gamma_1^p}\Big[p_i^1(\mathbf{x},\tau)K_{ij}^1(\mathbf{x},\mathbf{y},t-\tau) - u_i^1(\mathbf{x},\tau)F_{ij}^1(\mathbf{x},\mathbf{y},t-\tau)\Big]\,d\mathbf{x}d\tau +$$

$$+\int\limits_{\mathrm{T}}\int\limits_{\Gamma_1^*}\Big[p_i^1(\mathbf{x},\tau)K_{ij}^1(\mathbf{x},\mathbf{y},t-\tau) - u_i^1(\mathbf{x},\tau)F_{ij}^1(\mathbf{x},\mathbf{y},t-\tau)\Big]\,d\mathbf{x}d\tau, \quad \mathbf{y} \in \Gamma_1^p, \tag{7}$$

$$\frac{1}{2}p_j^1(\mathbf{y},t) = \int\limits_{\mathrm{T}}\int\limits_{\Gamma_1^p}\Big[p_i^1(\mathbf{x},\tau)K_{ij}^1(\mathbf{x},\mathbf{y},t-\tau) - u_i^1(\mathbf{x},\tau)F_{ij}^1(\mathbf{x},\mathbf{y},t-\tau)\Big]\,d\mathbf{x}d\tau +$$

$$+\int\limits_{\mathrm{T}}\int\limits_{\Gamma_1^*}\Big[p_i^1(\mathbf{x},\tau)K_{ij}^1(\mathbf{x},\mathbf{y},t-\tau) - u_i^1(\mathbf{x},\tau)F_{ij}^1(\mathbf{x},\mathbf{y},t-\tau)\Big]\,d\mathbf{x}d\tau, \quad \mathbf{y} \in \Gamma_1^*, \tag{8}$$

$$\frac{1}{2}u_j^1(\mathbf{y},t) = \int\limits_{\mathrm{T}}\int\limits_{\Gamma_1^p}\Big[p_i^1(\mathbf{x},\tau)U_{ij}^1(\mathbf{x},\mathbf{y},t-\tau) - u_i^1(\mathbf{x},\tau)W_{ij}^1(\mathbf{x},\mathbf{y},t-\tau)\Big]\,d\mathbf{x}d\tau +$$

$$+\int\limits_{\mathrm{T}}\int\limits_{\Gamma_1^*}\Big[p_i^1(\mathbf{x},\tau)U_{ij}^1(\mathbf{x},\mathbf{y},t-\tau) - u_i^1(\mathbf{x},\tau)W_{ij}^1(\mathbf{x},\mathbf{y},t-\tau)\Big]\,d\mathbf{x}d\tau, \quad \mathbf{y} \in \Gamma_1^*. \tag{9}$$

Аналогичные уравнения на Γ_2 области Ω_2:

$$\frac{1}{2}p_j^2(\mathbf{y},t) = \int\limits_{\mathrm{T}}\int\limits_{\Gamma_2^p}\Big[p_i^2(\mathbf{x},\tau)K_{ij}^2(\mathbf{x},\mathbf{y},t-\tau) - u_i^2(\mathbf{x},\tau)F_{ij}^2(\mathbf{x},\mathbf{y},t-\tau)\Big]\,d\mathbf{x}d\tau +$$

$$+\int\limits_{\mathrm{T}}\int\limits_{\Gamma_2^*}\Big[p_i^2(\mathbf{x},\tau)K_{ij}^2(\mathbf{x},\mathbf{y},t-\tau) - u_i^2(\mathbf{x},\tau)F_{ij}^2(\mathbf{x},\mathbf{y},t-\tau)\Big]\,d\mathbf{x}d\tau, \quad \mathbf{y} \in \Gamma_2^p, \tag{10}$$

$$\frac{1}{2}p_j^2(\mathbf{y},t) = \int\limits_{\mathrm{T}}\int\limits_{\Gamma_2^p}\Big[p_i^2(\mathbf{x},\tau)K_{ij}^2(\mathbf{x},\mathbf{y},t-\tau) - u_i^2(\mathbf{x},\tau)F_{ij}^2(\mathbf{x},\mathbf{y},t-\tau)\Big]\,d\mathbf{x}d\tau +$$

$$+\int\limits_{\mathrm{T}}\int\limits_{\Gamma_2^*}\left[p_i^2(\mathbf{x},\tau)K_{ij}^2(\mathbf{x},\mathbf{y},t-\tau)-u_i^2(\mathbf{x},\tau)F_{ij}^2(\mathbf{x},\mathbf{y},t-\tau)\right]d\mathbf{x}d\tau,\quad \mathbf{y}\in\Gamma_2^*, \tag{11}$$

$$\frac{1}{2}u_j^2(\mathbf{y},t)=\int\limits_{\mathrm{T}}\int\limits_{\Gamma_2^p}\left[p_i^2(\mathbf{x},\tau)U_{ij}^2(\mathbf{x},\mathbf{y},t-\tau)-u_i^2(\mathbf{x},\tau)W_{ij}^2(\mathbf{x},\mathbf{y},t-\tau)\right]d\mathbf{x}d\tau+$$

$$+\int\limits_{\mathrm{T}}\int\limits_{\Gamma_2^*}\left[p_i^2(\mathbf{x},\tau)U_{ij}^2(\mathbf{x},\mathbf{y},t-\tau)-u_i^2(\mathbf{x},\tau)W_{ij}^2(\mathbf{x},\mathbf{y},t-\tau)\right]d\mathbf{x}d\tau,\quad \mathbf{y}\in\Gamma_2^*. \tag{12}$$

В уравнениях (7)-(12) произведем замену переменных из условий плотного контакта:

$$u_i^1(\mathbf{x},t)=u_i^*(\mathbf{x},t),\ p_i^1(\mathbf{x},t)=p_i^*(\mathbf{x},t),\quad \mathbf{x}\in\Gamma_1^*,$$

$$u_i^2(\mathbf{x},t)=u_i^*(\mathbf{x},t),\ p_i^2(\mathbf{x},t)=-p_i^*(\mathbf{x},t),\quad \mathbf{x}\in\Gamma_2^*.$$

Кроме того, в области плотного контакта перейдем к интегрированию по поверхности Γ^* такой, что $\mathbf{n}_{\Gamma^*}=\mathbf{n}_{\Gamma_2^*}=-\mathbf{n}_{\Gamma_1^*}$, что повлечет за собой изменения знаков интегральных ядер $K_{ij}^1(\mathbf{x},\mathbf{y},t-\tau)$, $W_{ij}^1(\mathbf{x},\mathbf{y},t-\tau)$ и изменит знаки интегралов при переходе с Γ_1^* на Γ^*.

Тогда уравнения (7) и (10) примут вид:

$$\frac{1}{2}p_j^1(\mathbf{y},t)-\int\limits_{\mathrm{T}}\int\limits_{\Gamma_1^p}p_i^1(\mathbf{x},\tau)K_{ij}^1(\mathbf{x},\mathbf{y},t-\tau)d\mathbf{x}d\tau=-\int\limits_{\mathrm{T}}\int\limits_{\Gamma_1^p}u_i^1(\mathbf{x},\tau)F_{ij}^1(\mathbf{x},\mathbf{y},t-\tau)d\mathbf{x}d\tau+$$

$$+\int\limits_{\mathrm{T}}\int\limits_{\Gamma^*}p_i^*(\mathbf{x},\tau)K_{ij}^1(\mathbf{x},\mathbf{y},t-\tau)d\mathbf{x}d\tau+\int\limits_{\mathrm{T}}\int\limits_{\Gamma^*}u_i^*(\mathbf{x},\tau)F_{ij}^1(\mathbf{x},\mathbf{y},t-\tau)d\mathbf{x}d\tau,\quad \mathbf{y}\in\Gamma_1^p, \tag{13}$$

$$\frac{1}{2}p_j^2(\mathbf{y},t)-\int\limits_{\mathrm{T}}\int\limits_{\Gamma_2^p}p_i^2(\mathbf{x},\tau)K_{ij}^2(\mathbf{x},\mathbf{y},t-\tau)d\mathbf{x}d\tau=-\int\limits_{\mathrm{T}}\int\limits_{\Gamma_2^p}u_i^2(\mathbf{x},\tau)F_{ij}^2(\mathbf{x},\mathbf{y},t-\tau)d\mathbf{x}d\tau+$$

$$+\int\limits_{\mathrm{T}}\int\limits_{\Gamma^*}p_i^*(\mathbf{x},\tau)K_{ij}^2(\mathbf{x},\mathbf{y},t-\tau)d\mathbf{x}d\tau+\int\limits_{\mathrm{T}}\int\limits_{\Gamma^*}u_i^*(\mathbf{x},\tau)F_{ij}^2(\mathbf{x},\mathbf{y},t-\tau)d\mathbf{x}d\tau,\quad \mathbf{y}\in\Gamma_2^p. \tag{14}$$

Суммирование уравнений (8) и (11), (9) и (12), соответственно, дает нам следующие уравнения:

$$\int\limits_{\mathrm{T}}\int\limits_{\Gamma_1^p}p_i^1(\mathbf{x},\tau)K_{ij}^1(\mathbf{x},\mathbf{y},t-\tau)d\mathbf{x}d\tau+\int\limits_{\mathrm{T}}\int\limits_{\Gamma_2^p}p_i^2(\mathbf{x},\tau)K_{ij}^2(\mathbf{x},\mathbf{y},t-\tau)=$$

$$=\int\limits_{\mathrm{T}}\int\limits_{\Gamma_1^p}u_i^1(\mathbf{x},\tau)F_{ij}^1(\mathbf{x},\mathbf{y},t-\tau)d\mathbf{x}d\tau+\int\limits_{\mathrm{T}}\int\limits_{\Gamma_2^p}u_i^2(\mathbf{x},\tau)F_{ij}^2(\mathbf{x},\mathbf{y},t-\tau)-$$

$$-\int\limits_{\mathrm{T}}\int\limits_{\Gamma^*}p_i^*(\mathbf{x},\tau)\left[K_{ij}^1(\mathbf{x},\mathbf{y},t-\tau)-K_{ij}^2(\mathbf{x},\mathbf{y},t-\tau)\right]d\mathbf{x}d\tau-$$

$$-\int\limits_{\mathrm{T}}\int\limits_{\Gamma^*}u_i^*(\mathbf{x},\tau)\left[F_{ij}^1(\mathbf{x},\mathbf{y},t-\tau)-F_{ij}^2(\mathbf{x},\mathbf{y},t-\tau)\right]d\mathbf{x}d\tau,\quad \mathbf{y}\in\Gamma^*, \tag{15}$$

$$\int\limits_{\mathrm{T}}\int\limits_{\Gamma_1^p}p_i^1(\mathbf{x},\tau)U_{ij}^1(\mathbf{x},\mathbf{y},t-\tau)d\mathbf{x}d\tau-\int\limits_{\mathrm{T}}\int\limits_{\Gamma_2^p}p_i^2(\mathbf{x},\tau)U_{ij}^2(\mathbf{x},\mathbf{y},t-\tau)=$$

$$= \int_{T}\int_{\Gamma_1^p} u_i^1(\mathbf{x},\tau) W_{ij}^1(\mathbf{x},\mathbf{y},t-\tau) d\mathbf{x}d\tau - \int_{T}\int_{\Gamma_2^p} u_i^2(\mathbf{x},\tau) W_{ij}^2(\mathbf{x},\mathbf{y},t-\tau) +$$

$$+ \int_{T}\int_{\Gamma^*} p_i^*(\mathbf{x},\tau)\left[U_{ij}^1(\mathbf{x},\mathbf{y},t-\tau) - U_{ij}^2(\mathbf{x},\mathbf{y},t-\tau)\right] d\mathbf{x}d\tau +$$

$$+ \int_{T}\int_{\Gamma^*} u_i^*(\mathbf{x},\tau)\left[W_{ij}^1(\mathbf{x},\mathbf{y},t-\tau) - W_{ij}^2(\mathbf{x},\mathbf{y},t-\tau)\right] d\mathbf{x}d\tau, \quad \mathbf{y}\in\Gamma^*. \qquad (16)$$

Выводы. Таким образом, для нахождения четырех неизвестных: $\mathbf{u}^1(\mathbf{x},t)$, $\mathbf{u}^2(\mathbf{x},t)$ - перемещений берегов трещины-расслоения, $\mathbf{u}^*(\mathbf{x},t)$, $\mathbf{p}^*(\mathbf{x},t)$ - перемещений и усилий, возникающих на поверхности сцепления разнородных материалов, нами получена система из четырех гранично-контактных интегральных уравнений (13) - (16), которая может быть решена численно.

Список литературы

[1] *Массаковский В.И., Рыбка М.Т.* Обобщение критерия Гриффитса-Снеддона на случай неоднородного тела // Прикладная математика и механика. - 1964. - Т. 28. - С. 1061-1069.

[2] *Вайшельбаум В.М., Гольдштейн Р.В.* Осесимметричные задачи о трещине на границе раздела слоев в многослойной среде // МТТ. - 1976. - № 2. - С. 130-143.

[3] *Никишин В.С.* Задачи теории упругости о кольцевой и круговой трещинах на границе раздела слоя и полупространства // МТТ. - 2001. - № 3. - С. 132-143.

[4] *Гузь А.Н., Зозуля В.В.* Хрупкое разрушение материалов при динамических нагрузках.: Неклассические проблемы механики разрушения: В 4 т. / Под ред. А.Н. Гузя. - Т. 4, кн. 2. - Киев, 1993. - 236 с.

[5] *Guz A.N., Zozulya V.V.* Elastodynamic unilateral contact problem with frivtion for bodies with cracks // International Applied Mechanics. - 2002. - **38**(8). - P. 895-932.

[6] *Guz A.N., Zozulya V.V., Men'shikov A.V.* Three-dimensional contact problem for an elliptic crack interacting with a normally incident harmonic compression-expansion wave // Intern. Applied Mechanics. - 2003. - **39**(12). - P. 1425-1428.

[7] *Guz A.N., Zozulya V.V., Men'shikov A.V.* General spatial dynamic problem for an elliptic crack under the action of a normal shear wave, with consideration for the contact interaction of the crack faces // Intern. Applied Mechanics. - 2004. - **40**(2). - P. 156-159.

[8] *Угодчиков А.Г., Хуторянский Н.М.* Метод граничных элементов в механике деформируемого твердого тела. - Казань: Изд. Казанского унив., 1986. - 296с.

Институт механики им. С.П. Тимошенко, Киев, Украина
Абердинский университет, Абердин, Шотландия

Василий Александрович Меньшиков
Институт механики им. С.П. Тимошенко
ул. Нестерова 3, 03680 Киев, Украина
тел. 8050 323-38-95

V.A. Menshykov, O.V. Menshykov

The boundary contact integral equations in the elastodynamics problem for the interface crack between two half-spaces

The paper concerns the boundary contact integral equations for the interface crack between two elastic half-spaces with different mechanical properties under dynamic loading. The derived system of equations allows to evaluate the displacements at the crack faces, the traction and the displacements at the joint surface.

В.А. Меньшиков, А.В. Меньшиков

Гранично-контактные интегральные уравнения динамической задачи теории упругости о трещине на поверхности раздела полупространств

В настоящей работе получена система гранично-контактных интегральных уравнений, позволяющая определять перемещения берегов трещины-расслоения, усилия и перемещения на поверхности сцепления упругих полупространств с разными механическими характеристиками при динамическом нагружении.