

А.В. Меньшиков

Пространственная контактная задача для двух соосных круговых трещин при нормальном гармоническом нагружении

(Представлено академиком НАН Украины А.Н. Гузем)

Решение задач о динамическом нагружении тел с трещинами представляет значительный интерес для современной механики твердого деформируемого тела. Хорошо известно, что в процессе деформирования тела контактное взаимодействие противоположных берегов трещин оказывает значительное влияние на напряженно-деформированное состояние в окрестности трещин [1, 2]. В частности, различие между результатами, полученными для максимальных значений коэффициентов интенсивности напряжений нормального отрыва с учетом и без учета контактного взаимодействия берегов трещин, может при некоторых значениях частоты нагружения достигать 50 процентов [2-6] (аналогичная ситуация имеет место и для сдвиговых компонент [2, 7, 8]).

Общая методика решения задач о динамическом нагружении тел с трещинами с учетом контакта берегов была предложена А.Н. Гузем и В.В. Зозулей в совместной монографии [1]. Численное решение пространственных задач о взаимодействии нормальных гармонических волн растяжения сжатия и сдвига с плоской круговой и эллиптической трещинами было получено в работах [2-8].

В настоящей работе впервые рассмотрена пространственная задача механики разрушения для двух соосных стационарных плоских круговых трещин при нормальном падении гармонической волны растяжения-сжатия с учетом контакта противоположных берегов трещин. Проведено исследование взаимного влияния трещин при различном расстоянии между ними. Исследовано влияние контактного взаимодействия берегов на распределение коэффициента интенсивности напряжений нормального отрыва в окрестности фронта трещин при фиксированном значении волнового числа.

Постановка задачи. Пусть в трехмерном линейно упругом, однородном и изотропном пространстве имеются две соосные стационарные плоские круговые трещины без начального раскрытия (рисунок 1). Поверхности трещин задаются следующим образом:

$$\Omega_1 = \{x_1^2 + x_2^2 \leq a^2, x_3 = 0\}, \quad \Omega_2 = \{x_1^2 + x_2^2 \leq a^2, x_3 = c\}.$$

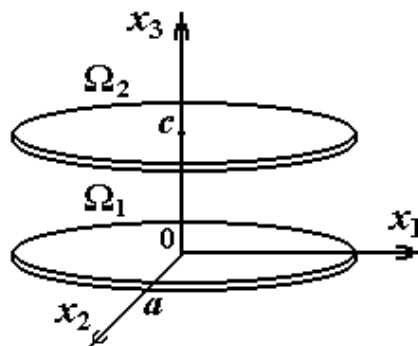


Рис 1.

Материал с трещинами находится под воздействием гармонической нагрузки. Вдоль оси Ox_3 распространяется с частотой ω и амплитудой Φ_0 гармоническая волна растяжения-сжатия, которая описывается следующей функцией $\Phi(\mathbf{x}, t) = \Phi_0 e^{i(k_1 x_3 - \omega t)}$, где $k_1 = \omega/c_1$ - обобщенное волновое число; $c_1 = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ - скорость распространения в материале продольных волн; λ и μ - упругие постоянные Ламе; ρ - плотность материала.

Как было отмечено ранее, противоположные берега трещин контактируют между собой в течение периода колебаний, поэтому в изменяющейся во времени области контакта берегов $\Omega_{cont}(t)$ возникают отличные от нуля силы контактного взаимодействия $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$. Следовательно нагрузка на берегах трещин $\mathbf{p}(\mathbf{x}, t)$ складывается из сил контактного взаимодействия и нагрузки $\mathbf{p}^*(\mathbf{x}, t)$, являющейся результатом действия падающей волны [1, 2]:

$$\mathbf{p}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{p}^*(\mathbf{x}, t) + \mathbf{q}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Omega := \Omega_1 \cup \Omega_2, \quad t \in \mathcal{T} := [0; T],$$

нагрузка $\mathbf{p}^*(\mathbf{x}, t)$ в рассматриваемом случае имеет вид:

$$\mathbf{p}^*(\mathbf{x}, t) = \left(0, 0, -k_1^2 \Phi_0 (\cos(k_1 x_3) \cos(\omega t) + \sin(k_1 x_3) \sin(\omega t)) \right), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \in \mathcal{T}.$$

Отметим, что учитывая ориентацию трещин относительно падающей волны, в рассматриваемой задаче отличны от нуля лишь нормальные составляющие векторов контактных сил взаимодействия, нагрузки и перемещений, которые и подлежат определению в ходе решения задачи.

Нормальные компоненты векторов контактных сил взаимодействия и разрыва перемещений $\Delta u_3(\mathbf{x}, t)$ на берегах трещин должны удовлетворять односторонним ограничениям Синьорини (Signorini):

$$\Delta u_3(\mathbf{x}, t) \geq 0, \quad q_3(\mathbf{x}, t) \geq 0, \quad \Delta u_3(\mathbf{x}, t) q_3(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \in \mathcal{T}. \quad (1)$$

Метод решения задачи. Следуя предложенному в работах [1, 2] подходу, представим нормальные компоненты векторов нагрузки и разрыва перемещений тригонометрическими рядами Фурье

$$p_3(\mathbf{x}, t) = \frac{p_{3,cos}^0(\mathbf{x})}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(p_{3,cos}^k(\mathbf{x}) \cos(\omega_k t) + p_{3,sin}^k(\mathbf{x}) \sin(\omega_k t) \right),$$

$$\Delta u_3(\mathbf{x}, t) = \frac{\Delta u_{3,cos}^0(\mathbf{x})}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\Delta u_{3,cos}^k(\mathbf{x}) \cos(\omega_k t) + \Delta u_{3,sin}^k(\mathbf{x}) \sin(\omega_k t) \right),$$

где $\omega_k = 2\pi k/T$, а коэффициенты Фурье имеют вид:

$$p_{3,cos}^k(\mathbf{x}) = \frac{\omega}{\pi} \int_0^T p_3(\mathbf{x}, t) \cos(\omega_k t) dt, \quad p_{3,sin}^k(\mathbf{x}) = \frac{\omega}{\pi} \int_0^T p_3(\mathbf{x}, t) \sin(\omega_k t) dt,$$

$$\Delta u_{3,cos}^k(\mathbf{x}) = \frac{\omega}{\pi} \int_0^T \Delta u_3(\mathbf{x}, t) \cos(\omega_k t) dt, \quad \Delta u_{3,sin}^k(\mathbf{x}) = \frac{\omega}{\pi} \int_0^T \Delta u_3(\mathbf{x}, t) \sin(\omega_k t) dt.$$

Для каждого $k = \overline{0, +\infty}$ коэффициенты Фурье связаны следующей системой граничных интегральных уравнений [2-6]:

$$\begin{aligned}
p_{3,\cos}^k(\mathbf{x}) - ip_{3,\sin}^k(\mathbf{x}) &= \\
&= - \int_{\Omega} \left(F_{33}^{Re}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k) + iF_{33}^{Im}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k) \right) \left(\Delta u_{3,\cos}^k(\mathbf{y}) - i\Delta u_{3,\sin}^k(\mathbf{y}) \right) d\mathbf{y}, \quad (2)
\end{aligned}$$

где $F_{33}^{Re}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k)$ и $F_{33}^{Im}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k)$ представляют собой действительную и мнимую части одного из фундаментальных решений динамической теории упругости $F_{33}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k)$, которое может быть получено посредством последовательного дифференцирования тензора фундаментальных перемещений Грина [1, 2]. В рассматриваемом случае, учитывая ориентацию системы координат, упомянутое комплекснозначное ядро имеет следующий вид [2-6]:

$$\begin{aligned}
F_{33}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k) &= \frac{\mu(\lambda + \mu)}{2\pi(\lambda + 2\mu)} r^{-3} + \frac{\omega_k^2}{8\pi\mu} \left(\frac{\mu^2}{c_2^2} + \left(2\lambda^2 + 4\lambda\mu + 3\mu^2 \right) \frac{c_2^2}{c_1^4} \right) r^{-1} - \\
&\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{(-i\omega_k)^n (n-1)}{4\pi\mu n!(n+2)} \left(\frac{4\mu^2(n-1)}{c_2^n} + \left[\lambda^2 n(n+2) + 4\lambda\mu(n+2) + 12\mu^2 \right] \frac{c_2^2}{c_1^{2+n}} \right) r^{n-3},
\end{aligned}$$

где $r = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}$ - расстояние между точками наблюдения и нагружения, а $c_2 = \sqrt{\mu/\rho}$ - скорость распространения в материале поперечных волн.

В интегральном ядре $F_{33}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k)$ содержатся неинтегрируемые слабо сингулярные r^{-1} и гиперсингулярные r^{-3} особенности, поэтому интегралы в системах граничных интегральных уравнений (2) были рассмотрены в смысле конечной части по Адамару. При численном решении задачи поверхность трещин была разбита на множество прямоугольных плоских элементов, на каждом из которых распределение векторов нагрузки и разрыва перемещений предполагалось постоянным. Для формирования матриц систем линейных алгебраических уравнений был применен метод коллокаций, с точками коллокации расположенными в геометрическом центре прямоугольных граничных элементов, аппроксимирующих поверхности трещин. Была использована методика регуляризации и аналитического вычисления интегралов с особенностями по полигональной области интегрирования, изложенная в [9, 10].

При решении задачи был также использован итерационный алгоритм решения динамических задач механики разрушения тел с трещинами при учете контактного взаимодействия противоположных берегов трещин [1, 2, 6].

Примеры численного решения задачи. В качестве численного примера рассмотрим материал с трещинами, обладающий следующими механическими свойствами: модуль упругости $E = 200$ ГПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$, плотность $\rho = 7800$ кг/м³.

На рисунке 2 приведено распределение контактных сил взаимодействия и разрыва перемещений на центральных сечениях трещин

$$S_1 = \{\mathbf{x} : -a \leq x_1 \leq a, x_2 = 0, x_3 = 0\},$$

$$S_2 = \{\mathbf{x} : -a \leq x_1 \leq a, x_2 = 0, x_3 = c\}$$

при фиксированных волновом числе $k_2 a = 0.5$ и безразмерном расстоянии между трещинами $c/a = 5$.

Отметим, что односторонние ограничения в виде неравенств (1) выполняются на поверхности обеих трещин в течении всего периода колебаний.

Кроме того, следует обратить внимание на тот факт, что решение задачи на поверхности двух трещин различно. Берега трещин совершают колебания с некоторым сдвигом по фазе, величина которого определяется расстоянием между трещинами.

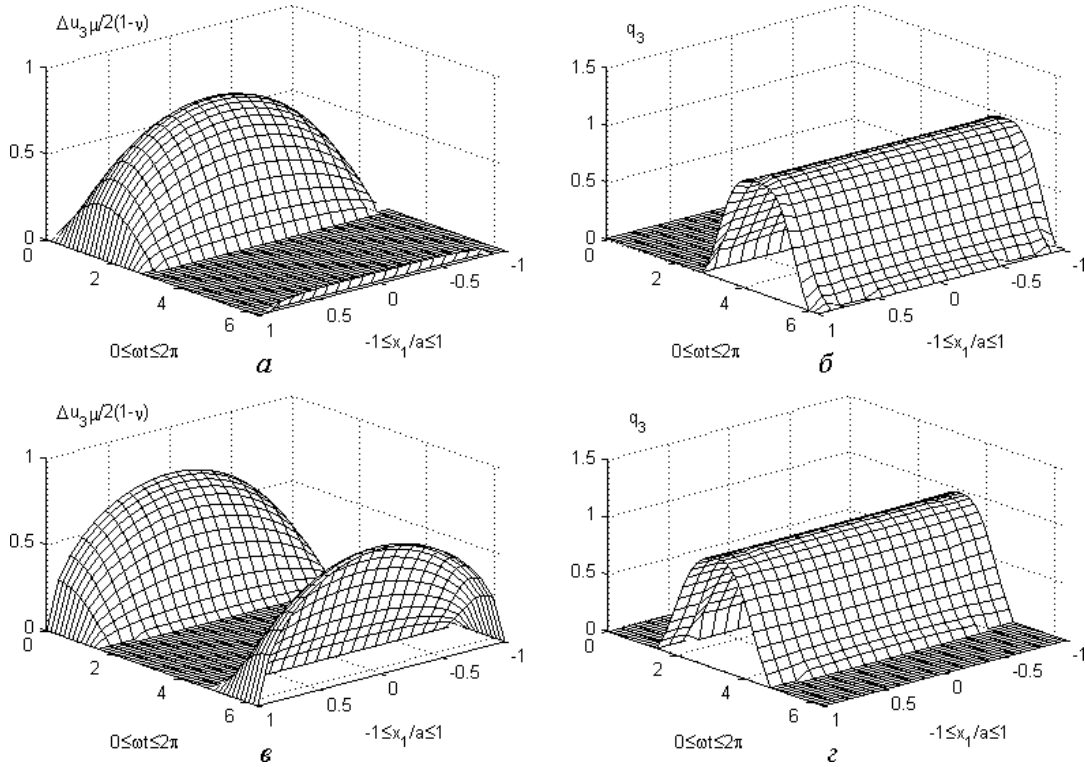


Рис. 2. Разрыв перемещений и контактные силы, а и б - трещина Ω_2 , в и г - трещина Ω_1

На рисунке 3 приведены результаты вычисления максимального значения коэффициента интенсивности напряжений (КИН) нормального отрыва $K_I^{max}(\mathbf{x})$, нормированного соответствующей статической величиной \tilde{K}_I^{stat} , в зависимости от расстояния между трещинами при фиксированном приведенном волновом числе $k_2 a = 0.5$. В качестве нормирующей статической величины использовалось значение КИН нормального отрыва для пространства с единственной плоской круговой трещиной в статическом случае $\tilde{K}_I^{stat} = 2\sigma\sqrt{a/\pi}$.

Очевидно, что учет контактного взаимодействия влияет на решение задачи, причем различие между результатами при заданном волновом числе и расстоянии между трещинами в диапазоне $1.0 \leq c/a \leq 2.0$ достигает 10 процентов. С увеличением волнового числа распределение КИН нормального отрыва значительно усложняется, а различие между результатами растет и достигает 30-50 процентов [11].

Еще раз отметим различия между решениями, полученными для двух трещин. Если в окрестности одной из них значения КИН нормального отрыва, полученные с учетом контактного взаимодействия, превосходят соответствующие значения КИН, полученные без учета взаимодействия, во всем исследованном диапазоне расстояний между трещинами, то решение в окрестности другой трещины имеет более сложную структуру, в определенном диапазоне расстояний наблюдается обратная картина (значения КИН, полученные без учета контактного взаимодействия, превосходят значения КИН, полученные с учетом взаимодействия).

На рисунке 3 хорошо видно, что взаимное влияние трещин растет по мере их приближения друг к другу. При удалении трещин это влияние стремится к нулю,

а решение в окрестности каждой трещины стремится к решению, полученному для пространства с единственной плоской круговой трещиной [2-4, 6]. Данное наблюдение имеет место как с учетом контактного взаимодействия противоположных берегов трещин, так и без учета упомянутого взаимодействия.

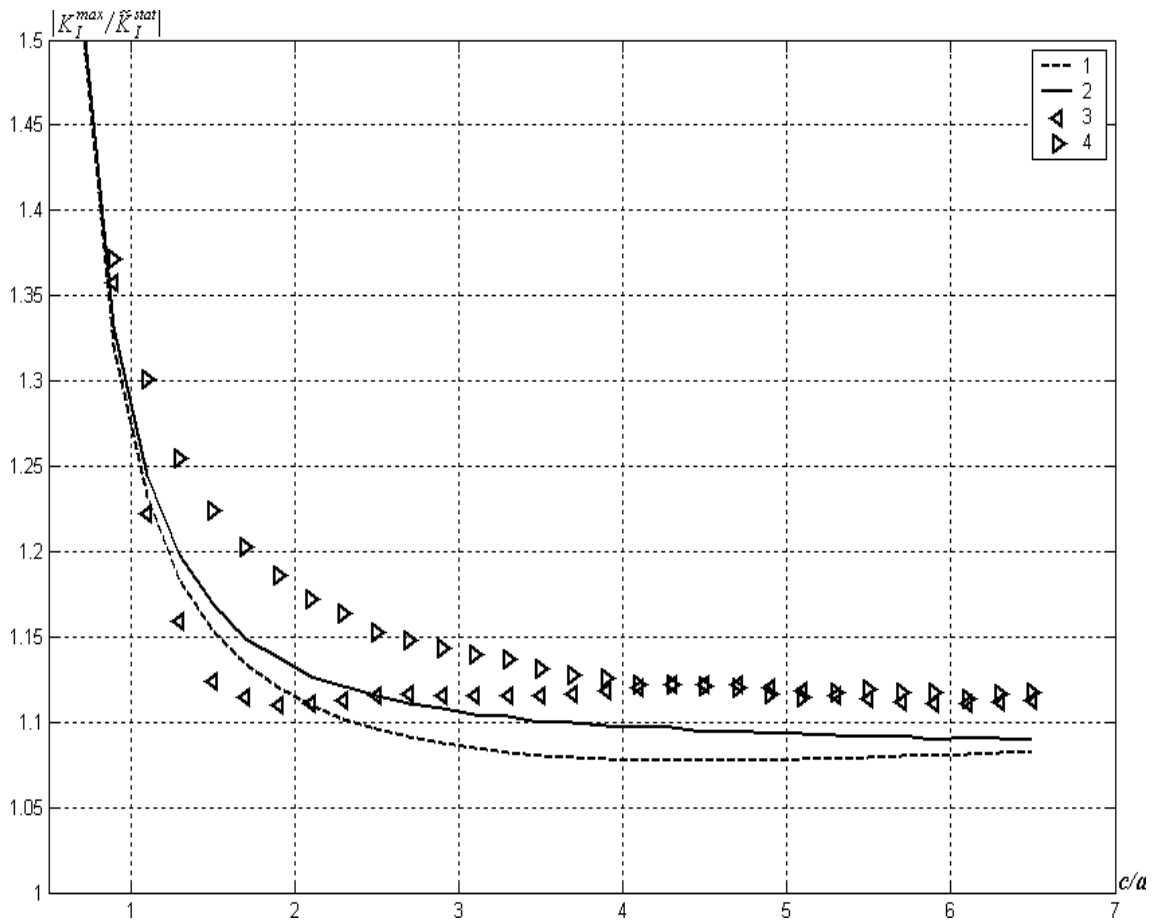


Рис. 3. Коэффициент интенсивности напряжений нормального отрыва в зависимости от расстояния между трещинами: кривые 1 и 3 - трещина Ω_1 ; 2 и 4 - трещина Ω_2 ; 1 и 2 - без учета контактного взаимодействия; 3 и 4 - с учетом взаимодействия

Выводы. Результаты, представленные в настоящей работе, еще раз демонстрируют важность учета контактного взаимодействия противоположных берегов трещин при решении задач механики твердого деформируемого тела с трещинами при динамическом нагружении.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Немецкой Службы Академических Обменов (DAAD, Ref. 322, PKZ: A/03/12873).

Список литературы

- [1] Гузь А.Н., Зозуля В.В. Хрупкое разрушение материалов при динамических нагрузках.: Неклассические проблемы механики разрушения: В 4 т. / Под ред. А.Н. Гузя. - Т. 4, кн. 2. - Киев, 1993. - 236 с.
- [2] Guz A.N., Zozulya V.V. Elastodynamic unilateral contact problems with friction for bodies with cracks, // Intern. Applied Mechanics. - 2002. - **38**, No 8. - P. 895-932.

- [3] *Zozulya V.V., Men'shikov A.V.* On one contact problem in fracture mechanics for a normally incident tension-compression wave // Intern. Applied Mechanics. - 2002. - **38**, No 7. - P. 824-828.
- [4] *Guz A.N., Menshykov O.V., Zozulya V.V.* Surface contact of elliptical crack under normally incident tension-compression wave // Theoretical and Applied Fracture Mechanics. - 2003. - **40**, No 3. - P. 285-291.
- [5] *Guz A.N., Zozulya V.V., Men'shikov A.V.* Three-dimensional contact problem for an elliptic crack interacting with a normally incident harmonic compression-expansion wave // Intern. Applied Mechanics. - 2003. - **39**, No 12. - P. 1425-1428.
- [6] *Zozulya V.V., Menshykov O.V.* Use of the constrained optimization algorithms in some problems of fracture mechanics // Optimization and Engineering. - 2003. - **4**, No 4. - P. 365-384.
- [7] *Меньшиков О.В.* Динамічна контактна задача для еліптичної тріщини під впливом нормальної гармонічної хвилі зсуву // Доп. НАН України. - 2003. - № 12. - С. 45-50.
- [8] *Guz A.N., Zozulya V.V., Men'shikov A.V.* General spatial dynamic problem for an elliptic crack under the action of a normal shear wave, with consideration for the contact interaction of the crack faces // Intern. Applied Mechanics. - 2004. - **40**, No 2. - P. 156-159.
- [9] *Zozulya V.V., Gonzalez-Chi P.I.* Weakly singular, singular and hypersingular integrals in elasticity and fracture mechanics // Journal of the Chinese Institute of Engineers. - 1999. - **22**, No 6. - P. 763-775.
- [10] *Zozulya V.V., Men'shikov V.A.* Solution of three-dimensional problems of the dynamic theory of elasticity for bodies with cracks using hypersingular integrals // Intern. Applied Mechanics. - 2000. - **36**, No 1. - P. 74-81.
- [11] *Menshykov O.V.* Elastodynamic contact problem for coaxial penny-shaped cracks // Book of Abstracts, XXXII Summer School - Conference "Advanced Problems in Mechanics (APM 2004)", Russia, St. Petersburg. - 2004. P. 74.

Александр Васильевич Меньшиков
 Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины
 ул. Нестерова 3, 03057 Киев, Украина

Spatial contact problem for two coaxial penny-shaped cracks under normal harmonic load

The present paper is devoted to the solution of the 3-D fracture mechanics problem for linearly elastic, homogeneous and isotropic solid with two coaxial penny-shaped cracks under normally incident harmonic tension-compression wave with allowance for the contact interaction of cracks' adjoining faces. The dependence of the normalized stress intensity factor (opening mode) versus the mutual arrangement of cracks is studied. The present numerical results are compared with corresponding those obtained without allowance for the contact interaction of cracks' faces.

Пространственная контактная задача для двух соосных круговых трещин при нормальном гармоническом нагружении

Настоящая работа посвящена решению пространственной задачи механики разрушения для линейно упругого, однородного и изотропного пространства с двумя соосными плоскими круговыми трещинами под воздействием нормальной гармонической волны растяжения-сжатия. Задача решена с учетом контактного взаимодействия противоположных берегов трещин. Исследована зависимость коэффициента интенсивности напряжений нормального отрыва от взаимного расположения трещин. Проведено сравнение представленных численных результатов с результатами, полученными без учета контактного взаимодействия.