

А.В. Меньшиков

Учет контакта берегов стационарной круговой трещины при гармоническом нагружении

(Представлено академиком НАН Украины А.Н. Гузем)

Вступление. При анализе процессов, предшествующих началу распространения трещины в динамических задачах теории разрушения, важную роль имеет определение напряженно-деформированного состояния стационарной трещины под действием гармонического нагружения. Обычно предполагается, что волны напряжений, распространяющиеся в теле и взаимодействующие с трещиной, приходят из бесконечности или от границы тела, на которой приложены динамические нагрузки, а возможность контактного взаимодействия берегов трещины не принимается во внимание [1, 2]. Однако, пренебрежение упомянутым контактным взаимодействием может существенным образом сказаться на точности получаемых результатов, так как контакт берегов трещины оказывает значительное влияние на напряженно-деформированное состояние в окрестности края трещины [3-8].

Постановка задачи. Рассмотрим стационарную круговую трещину с поверхностью $\Omega = \{x_1^2 + x_2^2 \leq l^2; x_3 = 0\}$, расположенную в однородном, линейно-упругом, изотропном пространстве R^3 , под воздействием гармонической волны растяжения-сжатия, распространяющейся под произвольным углом к поверхности трещины и описываемой следующей функцией

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \Phi_0 e^{i(k_1(\mathbf{n}, \mathbf{x}) - \omega t)},$$

где $\omega = 2\pi/T$ - частота падающей волны, T - период нагружения; Φ_0 - амплитуда; $k_1 = \omega/c_1$ - обобщенное волновое число; $c_1 = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ - скорость распространения продольных

волн; $\mu > 0$ и $\lambda > -\mu$ - постоянные Ламе, $\rho > 0$ - удельная плотность материала; $\mathbf{n} = (\cos \alpha, 0, \sin \alpha)$, причем α - угол между осью Ox_1 и направлением распространения волны.

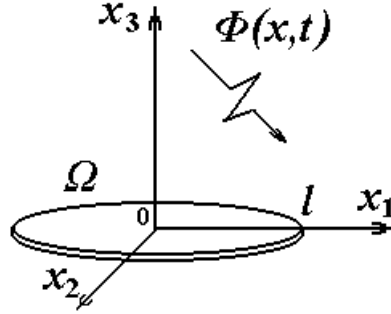


Рис. 1. Круговая трещина под воздействием гармонической волны

Нагрузка на берегах трещины, вызванная падающей волной, имеет следующий вид

$$\mathbf{p}^*(\mathbf{x}, t) = (\text{Re}\{-\mu k_1^2 \sin 2\alpha \Phi_0 e^{i(k_1 x_1 \cos \alpha - \omega t)}\}, 0, \text{Re}\{-\mu k_1^2 (c_1^2/c_2^2 - 2 \cos^2 \alpha) \Phi_0 e^{i(k_1 x_1 \cos \alpha - \omega t)}\}).$$

Однако, как отмечено в работах [3-7], в процессе деформации материала всегда имеет место контактное взаимодействие противоположных берегов трещины, приводящее к тому, что к вышеупомянутой нагрузке добавляются силы контактного взаимодействия берегов трещины $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$, возникающие в области контакта. Взаимные перемещения берегов трещины характеризуются вектором разрыва перемещений $\Delta \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$. Отметим, что в рассматриваемом случае, учитывая ориентацию системы координат и направление распространения волны, в направлении оси Ox_2 силы контактного взаимодействия и перемещения берегов трещины отсутствуют, поэтому односторонние ограничения [3, 4], которые должны быть выполнены для нормальных и касательных компонент упомянутых векторов, приобретают следующий вид

$$\Delta u_3(\mathbf{x}, t) \geq 0, q_3(\mathbf{x}, t) \geq 0, \Delta u_3(\mathbf{x}, t) q_3(\mathbf{x}, t) = 0, \mathbf{x} \in \Omega, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} |q_1(\mathbf{x}, t)| \leq k_\tau q_3(\mathbf{x}, t) &\Rightarrow \partial_t \Delta u_1(\mathbf{x}, t) = 0; \\ |q_1(\mathbf{x}, t)| > k_\tau q_3(\mathbf{x}, t) &\Rightarrow \partial_t \Delta u_1(\mathbf{x}, t) = -\lambda_\tau q_\tau(\mathbf{x}, t), \mathbf{x} \in \Omega, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\lambda_\tau = |\partial_t \Delta u_1(\mathbf{x}, t)| / |q_1(\mathbf{x}, t)|$; $k_\tau > 0$ - постоянный коэффициент трения, $\partial_t = \partial / \partial t$ - частная производная по времени.

Метод решения задачи. Одной из основных сложностей, встречающихся при решении динамических задач теории разрушения с учетом контактного взаимодействия, является

нелинейность граничных условий [3, 4], имеющая место в силу неизвестности области контакта берегов трещины, изменяющейся на протяжении всего периода колебаний. Форма и размер области контакта берегов в каждый момент времени могут быть определены лишь непосредственно в процессе решения задачи, поэтому компоненты напряженно-деформированного состояния не могут быть представлены гармоническими функциями. Представим компоненты векторов сил контактного взаимодействия и разрыва перемещений берегов трещины рядами Фурье [3-8]

$$p_j(\mathbf{x}, t) = \operatorname{Re} \left\{ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p_j^k(\mathbf{x}) e^{i\omega_k t} \right\}, \quad \Delta u_j(\mathbf{x}, t) = \operatorname{Re} \left\{ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Delta u_j^k(\mathbf{x}) e^{i\omega_k t} \right\}, \quad j = \overline{1,3},$$

где $\omega_k = 2\pi k/T$ и

$$p_j^k(\mathbf{x}) = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^T p_j(\mathbf{x}, t) e^{-i\omega_k t} dt, \quad \Delta u_j^k(\mathbf{x}) = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^T \Delta u_j(\mathbf{x}, t) e^{-i\omega_k t} dt. \quad j = \overline{1,3}.$$

Коэффициенты Фурье $p_j^k(\mathbf{x})$ и $\Delta u_j^k(\mathbf{x})$ связаны следующей системой граничных интегральных уравнений

$$p_i^k(\mathbf{x}) = - \sum_{j=1}^3 \int_{\Omega} F_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k) \Delta u_j^k(\mathbf{y}) d\Omega, \quad i = \overline{1,3}, \quad k = \overline{-\infty, +\infty}. \quad (3)$$

Выражения, позволяющие провести регуляризацию и дальнейшее численное интегрирование фундаментальных решений динамической теории упругости $F_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k)$, содержащих неинтегрируемые особенности, порядок которых превышает размерность области интегрирования, приведены в работах [4-9].

При решении задачи для коррекции нормальных и касательных составляющих векторов сил контактного взаимодействия и разрыва перемещений берегов трещины в соответствии с ограничениями (1), (2) были применены итерационные алгоритмы динамической теории упругости, подробное исследование свойств которых содержится в работах [4, 10]. Отметим, что в настоящей работе впервые проведена одновременная коррекция нормальных и касательных составляющих упомянутых векторов, таким образом, учтено влияние нормального контакта и трения берегов трещины на напряженно-деформированное состояние в окрестности ее поверхности.

Численные результаты. Рассмотрим трещину единичного радиуса, расположенную в материале со следующими характеристиками: модуль упругости $E = 200 \text{ ГПа}$, коэффициент

Пуассона $\nu = 0,3$, плотность $\rho = 7800 \text{ кг/м}^3$, коэффициент трения $k_r = 0.2$. Волна растяжения-сжатия распространяется под углом $\alpha = -\pi/6$ к поверхности трещины, приведенное волновое число $k_2 l = 2.0$.

Распределение нормальных и касательных компонент векторов сил контактного взаимодействия и разрыва перемещений берегов трещины на ее центральном сечении $S = \{-l \leq x_1 \leq l; x_2 = 0; x_3 = 0\}$ приведено на рисунках 2 и 3.

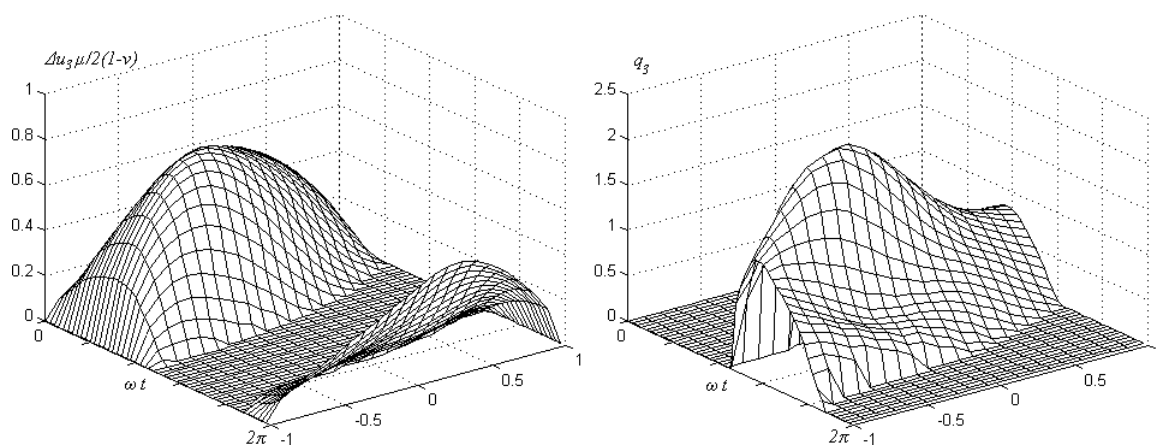


Рис. 2. Нормальные компоненты векторов разрыва перемещений и контактных сил взаимодействия на центральном сечении трещины

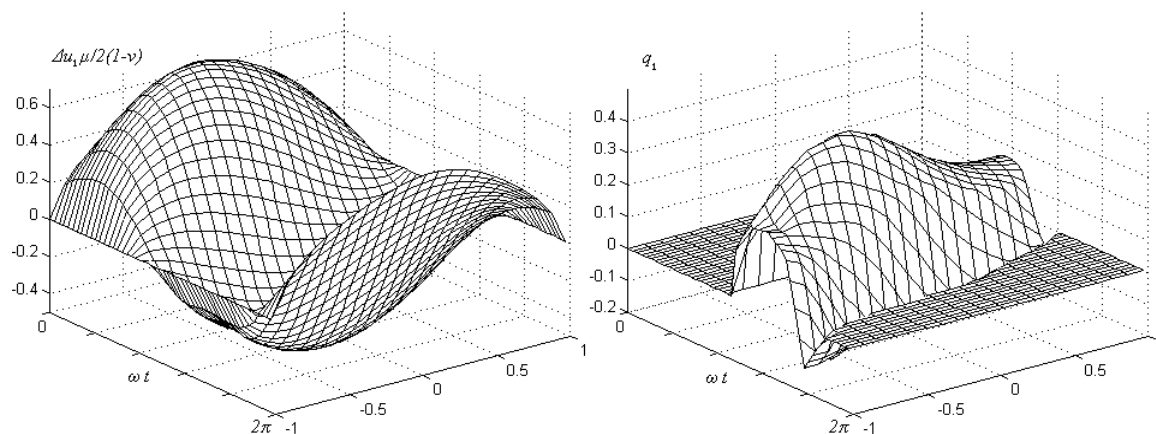


Рис. 3. Касательные компоненты векторов разрыва перемещений и контактных сил взаимодействия на центральном сечении трещины

Видно, что односторонние ограничения (1), (2) выполняются на протяжении всего периода колебаний. Нормальные компоненты векторов сил контактного взаимодействия и разрыва перемещений берегов трещины – неотрицательны, но в то же время не отличны от нуля одновременно. Распределение касательных компонент упомянутых векторов определяется распределением нормальной компоненты вектора сил контактного взаимодействия и зависит от коэффициента трения.

Отметим, что полученное решение является несимметричным, на рисунках хорошо видно, что контактное взаимодействие имеет место в различных точках поверхности трещины в различные моменты времени.

Выводы. Проведенные исследования доказывают необходимость учета контактного взаимодействия берегов трещин при расчете конструкций на прочность методами механики разрушения. Использование применявшихся в данной работе методов, позволяющих учесть контактное взаимодействие берегов трещин, поможет более точно оценить прочность создаваемой конструкции и предотвратить ее внезапное разрушение.

1. *Balas J., Sladek J., Sladek V.* Stress Analysis by Boundary Element Methods, Elsevier, Amsterdam, 1989. 688 p.
2. *Черепанов Г.П.* Механика хрупкого разрушения. М. 1974. 640 с.
3. *Гузь А.Н., Зозуля В.В.* Хрупкое разрушение материалов при динамических нагрузках.: Неклассические проблемы механики разрушения: В 4 т. под ред. А.Н. Гузя. Т. 4, книга 2, К., 1993. 236 с.
4. *Guz A.N., Zozulya V.V.* Elastodynamic unilateral contact problems with friction for bodies with cracks // International Applied Mechanics, 2002, Vol. 38, № 8, P. 895-932.
5. *Меньшиков А.В.* Исследование контактного взаимодействия берегов трещины в трехмерном пространстве для случая нормального падения волны растяжения-сжатия // Доповіді НАН України. - 2002. - № 6. - С. 52-55.
6. *Zozulya V.V., Men'shikov A.V.* On one contact problem in fracture mechanics for a normally incident tension-compression wave // International Applied Mechanics, 2002, Vol. 38, № 7, P. 824-828.

7. Zozulya V.V., Men'shikov A.V. Contact interaction of the faces of a penny-shaped crack under a normally incident shear wave // International Applied Mechanics, Vol. 38, № 9, 2002, p. 1114-1118.
8. Zozulya V.V., Menshykov O.V. 3-D Fracture Dynamics with allowance for crack edges contact interaction // CD-ROM of 15th ASCE Engineering Mechanics Division Conference, The Columbia University, New York, NY, USA, 2002.
9. Zozulya V.V., Gonzalez-Chi P.I. Weakly singular, singular and hypersingular integrals in elasticity and fracture mechanics // Journal of the Chinese Institute of Engineers, 1999, **22**(6), P. 763-775.
10. Zozulya V.V., Men'shikova M.V. Study of iterative algorithms for solution of dynamic contact problems for elastic cracked bodies // International Applied Mechanics, 2002, Vol. 38, № 5, P. 573-577.

Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины, Киев

Украина, 61124, г. Харьков, ул. Матросова 8, кв. 8., Меньшиков Александр Васильевич
Тел. (0572) 52-45-77